SESSION DE 1999

Filière PC , PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II - ALGEBRE

Durée : 3 heures

L'utilisation des calculatrices est autorisée

Dans tout le problème , E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension p non nulle. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E, et B une base orthonormée de E.

On rappelle que l'application qui à un vecteur x de E associe le vecteur colonne de ses coordonnées dans B est une isométrie vectorielle de E sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, et que celle qui à un endomorphisme u associe sa matrice dans B est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

On notera I l'élément unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, on note $\overline{X}$ l'élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont les conjugués de ceux de X.

Pour A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on notera :

$Sp(A)=\{\lambda \in \mathbb{R}; det(A-\lambda I)=0\}$.

$Ker(A)=\{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}); AX=0\}$.

$Im(A)=\{AX; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.

On dira qu'un sous-espace F de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est stable par A si $AF=\{AX; X \in F\}$ est contenu dans F.

Pour x réel, on notera [x] la partie entière de x.

En fin, on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant : si toutes les valeurs propres de u sont réelles, $E=\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker((u-\lambda Id)^p)$,où Sp(u) désigne l'ensemble des valeurs propres de u. On admettra aussi que quels que soient λ,μ deux réels distincts, et q et q' deux entiers naturels non nuls quelconques, $Ker(u-\lambda Id)^q$ et $Ker(u-\mu Id)^{q'}$ sont toujours en somme directe.

Pour A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, n entier naturel non nul et λ réel, on notera

$$C(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \ ({}^tA-\lambda I)^k (A-\lambda I)^{n-k}.$$

Partie 1

On considère dans cette partie un endomorphisme u de E.
Pour k entier naturel, on note $N_k=Ker(u^k)$, $n_k=dim(N_k)$, et $I_k=Im(u^k)$ (u^k désigne la composée k fois de u, $u^0=Id$).

1) Montrer que pour tout k, N_k est contenu dans N_{k+1}, et I_{k+1} est contenu dans I_k.

2) **a)** En considérant la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe k tel que $N_k=N_{k+1}$.
b) On pose $q=\min\{k\ ;N_k=N_{k+1}\}$. Prouver que q est au plus égal à p que, pour tout k supérieur ou égal à q, $N_k=N_q$ et que, pour tout k strictement inférieur à q, $N_k\neq N_{k+1}$.
c) Déduire de ce qui précède que, pour tout k supérieur ou égal à q, $I_k=I_q$ et que, pour tout k strictement inférieur à q, $I_k\neq I_{k+1}$.

3) Prouver que $N_q \oplus I_q=E$, et que la restriction de u à I_q induit un isomorphisme de I_q dans lui-même.

4) Soit λ réel non nul.
a) Montrer que N_q et I_q sont stables par $(u-\lambda Id)$.
b)Montrer que pour tout n, $Ker(u-\lambda Id)^n$ est contenu dans I_q.
(On appliquera la décomposition du 3) à un élément de $Ker(u-\lambda Id)^n$, puis on examinera son image par $(u-\lambda Id)^n$).

Partie 2

Un élément A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dit n-symétrique (n entier naturel non nul) si C(0)=0.

1) Montrer que A est 1-symétrique si et seulement si A est symétrique.

2) **a)** Pour m et q entiers naturels tels que m+q<n, montrer que : $\sum_{k=m}^{n-q}(-1)^k C_n^k C_k^m C_{n-k}^q = 0$.
b) Prouver que si A est n-symétrique, pour tout réel μ, $A-\mu I$ est aussi n-symétrique.

3) **a)** Soit A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que A=T+N, avec T symétrique, TN=NT, et $N^r=0$. Etablir que A est 2r-1-symétrique.
b) Prouver que si A est 2r-1-symétrique, alors A est 2r-symétrique.(Ecrire $C_{2r}^k = C_{2r-1}^{k-1} + C_{2r-1}^k$)

Partie 3

Le but de cette partie et de la suivante est d'étudier une réciproque du **Partie 2.3)** pour les endomorphismes de E. Dans cette partie A est une matrice n-symétrique.

1) Soient λ, μ deux complexes et X,Y deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tels que $AX=\lambda X$ et $AY=\mu Y$.
a) Calculer $A\overline{Y}$ en fonction de μ et de $\overline{Y}$.
b) En calculant ${}^t\overline{Y}C(0)X$, montrer que $(\lambda-\overline{\mu})^n\ {}^t\overline{Y}X=0$.
c) Déduire de ce qui précède que toutes les valeurs propres de A sont réelles, et que si λ, μ sont deux éléments distincts de Sp(A) alors $Ker(A-\lambda I)$ et $Ker(A-\mu I)$ sont orthogonaux.

2) Soit Y de $Ker(A-\mu I)$ et X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tYC(0)X={}^tY(A-\mu I)^n X$ et en déduire que $Ker(A-\mu I)$ est orthogonal à $Im(A-\mu I)^n$.

3) Soit $q=\min\{k ; \mathrm{Im}((A-\mu I)^k)=\mathrm{Im}((A-\mu I)^{k+1})\}$.

a) Prouver que $\mathrm{Ker}(A-\mu I)$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(A-\mu I)^q$.

b) Montrer par récurrence sur k que $\mathrm{Ker}(A-\mu I)^k$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(A-\mu I)^q$

(pour Y de $\mathrm{Ker}(A-\mu I)^{k+1}$, on posera $X=(A-\mu I)Y$, et on prouvera que pour tout Z de $\mathrm{Im}(A-\mu I)^q$, ${}^t YC(\mu)Z = {}^t Y(A-\mu I)^n Z$)

c) Déduire de ce qui précède, en utilisant I.4), que si λ et μ sont deux éléments distincts de Sp(A), alors $\mathrm{Ker}(A-\mu I)^p$ et $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^p$ sont orthogonaux.

d) Etablir que pour tout λ, $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^p$ est stable par ${}^tA$.

4) On suppose dans cette question que A est nilpotente et $A^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \neq 0$.

a) Montrer qu'il existe X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = A^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}X \neq 0$ et que pour tout $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $A^kX=0$.

b) On suppose que n=2r. Calculer ${}^tXC(0)X$ en fonction de Y et de r et en déduire une contradiction.

c) On suppose n=2r+1. Conclure comme au b) en calculant ${}^t(AX)C(0)X$ en fonction de Y et de r .

Partie 4

Dans cette partie on considère u endomorphisme de E, de matrice dans la base B égale à A. u est dit n-symétrique si A est n-symétrique.

1) montrer que cette définition ne dépend pas de la base orthonormée choisie.

2) Prouver que si $u=\theta+\nu$, avec θ symétrique, $\theta\nu=\nu\theta$ et $\nu^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}=0$, alors u est n-symétrique.

3) On suppose que u est n-symétrique. D'après III, E est somme directe orthogonale des $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id})^p$, λ parcourant le spectre de u.

En considérant les endomorphismes u_λ induits par u sur les $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id})^p$, λ parcourant le spectre de u, montrer que $u=\theta+\nu$, avec θ symétrique, $\theta\nu=\nu\theta$ et $\nu^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}=0$.

4) Prouver que u est 2r-symétrique si et seulement si u est 2r-1-symétrique. Quels sont les endomorphismes 2-symétriques?